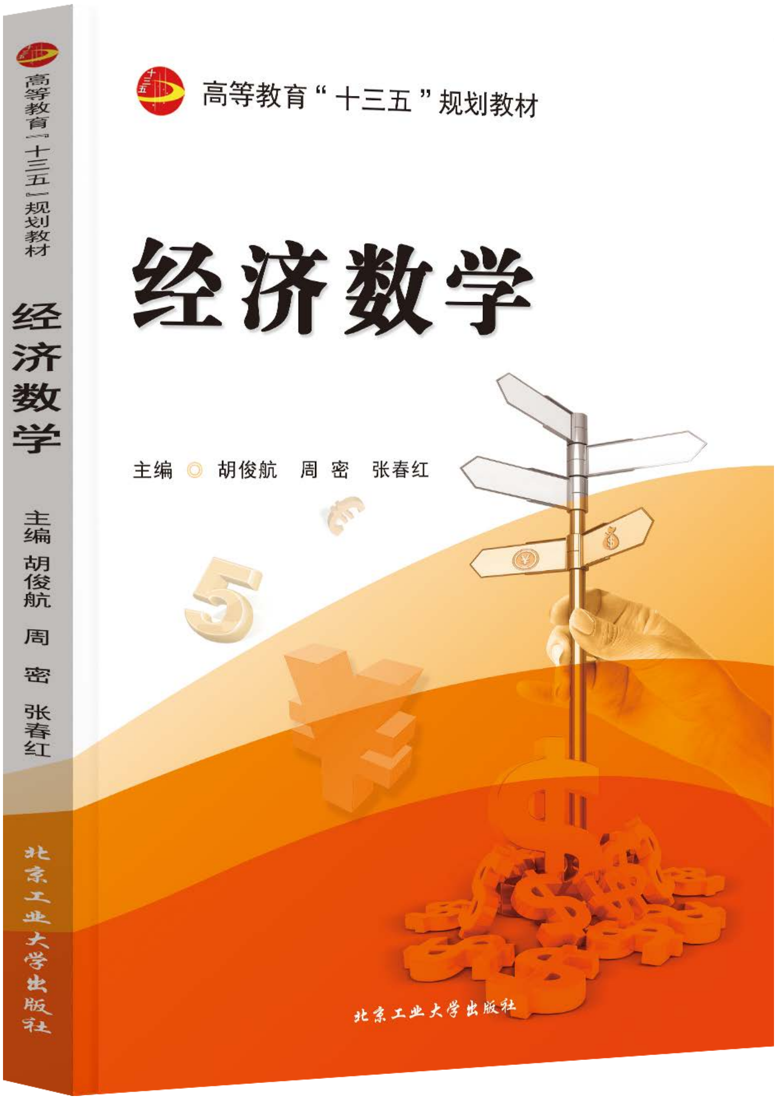


书名：经济数学

ISBN：978-7-5639-6364-5

作者：胡俊航 周密 张春红

出版社：北京工业大学出版社

定价：49.80元

前言

为了适应应用型、实践型人才目标的要求，编者经过认真总结、分析并吸收同类高等院校教学改革经验，遵循“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，结合编者多年从事高等数学方面的科学研究与教学改革经验及同类教材的发展趋势，针对专科经济类、管理类专业所需数学知识编写了本。

编者在编写本书时，力求使本书应用性强，应用面广，语言简单易懂，同时加大了信息量，并渗透现代数学思想，注意从实际问题中引入概念，把握好理论推导的深度，注重基本运算、分析问题和解决问题能力的培养，贯彻理论联系实际的原则，深入浅出，通俗易懂，便于教师讲授和学生学习。

编者在编写本书过程中，引入许多案例，这有利于引导学生积极思考和实践，培养学生分析问题和解决实际问题的能力，增强学生的技术技能和职业素质.本书在内容框架的构建上，力争做到系统、全面、实用，部分带“*”的内容为选讲内容，这为各专业教学内容的选择提供了极大的弹性，充分体现了其在经济、管理类专业的通用性。

由于编者水平有限，经济数学教学改革中的一些问题还有待探索，不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目录

CONTENTS

模块一　微积分及其在经济学的应用

1 CHAPTER 第一章 函数、极限与连续

函数及其极限和连续性在经济学上有着广泛的应用.本章在复习和加深函数有关知识的基础上,着重介绍函数的极限和函数的连续性等基本概念、性质及其运算法则.

第一节　函数

一、常量与变量

我们在观察和研究经济现象的过程中,经常会遇到不同的量,这些量一般可分为两种——常量和变量.在某一过程中始终保持不变的量称为常量,而不断变化的量称为变量.

【案例 1-1】某种商品的平均生产成本为常数 $AC=50$(元/件),那么总生产成本 C 与产量 Q 之间的对应关系是

$$C=AC\cdot Q=50Q$$

这里平均成本是常量,产量和总生产成本是变量.

应当注意,一个量是常量还是变量,要依赖于研究现象所在的具体场合及所给的条件,同一个量在某种情况下是常量,而在其他情况下可能是变量.

通常,常量用 a 、b 、c 等来表示,变量用 x 、y 、z 等来表示,几何上,常量在数轴上是一个定点,变量在数轴上是一个动点.

二、区间与邻域

1.区间

变量所能取的一切数值的全体称为变量的取值范围，通常用区间表示，区间是最常用的实数集合.设 a 与 b 为两个实数，且 $a<b$ ，x 为变量，则

满足不等式 $a<x<b$ 的实数称为开区间，记为 (a,b) ，即 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$ ；

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数称为闭区间，记为 $[a,b]$ ，即 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ ；

满足不等式 $a\leqslant x<b$ 、$a<x\leqslant b$ 的实数称为半开半闭区间，记为 $[a,b)$ 、$(a,b]$ ，即

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}\text{ 、}(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$$

区间的几何意义是，数轴上 a 、$b(a<b)$ 两点之间的线段（开区间不含端点，闭区间含端点），如图 1-1 所示.

以上区间均为有限区间，下面把区间的概念拓展为无限区间.

满足不等式 $-\infty<x<+\infty$（全体实数），记为 $(-\infty,+\infty)$，即

$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|-\infty<x<+\infty\}\text{ ；}$$

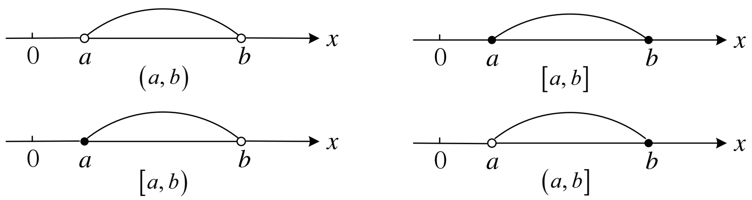


图 1－1

满足不等式 $a<x<+\infty$，记为 $(a,+\infty)$，即 $(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$；

满足不等式 $a\leqslant x<+\infty$，记为 $[a,+\infty)$，即 $[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$；

满足不等式 $-\infty<x<b$，记为 $(-\infty,b)$，即 $(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$；

满足不等式 $-\infty<x\leqslant b$，记为 $(-\infty,b]$，即 $(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$.

注意："$-\infty$"和"$+\infty$"分别读作"负无穷大"和"正无穷大"，"∞"是一个记号，并不表示一个很大的数，且不能参与运算.

2.邻域

邻域是一个与区间有关的概念.设 $\delta>0$，x_0 是一个实数，满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，即集合 $\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 的全体实数 x 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$. 其中 x_0 为邻域的中心，δ 为邻域的半径.

如果 x 在点 x_0 的 δ 邻域内变化但不能取 x_0，即 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$，则称此邻域为点 x_0 的去心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$. 相应地，称 $U(x_0,\delta)$ 为点 x_0 的有心邻域，点 x_0 的有心邻域和去心邻域的几何意义分别如图 1－2（a）和图 1－2（b）所示.

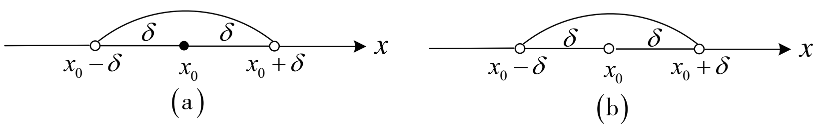


图 1－2

三、函数的概念

在研究某个问题时，出现的变量都不止一个，常常会有几个变量的变化，它们并不是孤立的，而是具有相互联系、相互依赖的某种数量关系，先看下面的案例.

【案例 1－2】某集团公司的一个下属工厂每天最多能生产某种产品 3 000 件，生产此种产品的固定成本为 20 000 元，每生产一件产品，成本增加 100 元，则每天的总成本 C 与每天的产量 x（件）之间的关系为

$$C=20\,000+100x,\ 0\leqslant x\leqslant 3\,000 \text{ 或 } x\in[0,3\,000]$$

【案例 1－3】某市市内家庭固定电话的收费标准规定如下：每次通话，首 3 分钟收费 0.20元，以后按每分钟 0.10 元计费，尾数不满一分钟的按 1 分钟计费. 以 t（以分计）表示通话时间，以 y（以元计）表示需付的通话费，则 y 与 t 之间的关系可以表示为

$$y=f(t)=\begin{cases}0.20, & 0<t\leqslant 3,\\ 0.30, & 3<t\leqslant 4,\\ 0.40, & 4<t\leqslant 5,\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

或写成

$$y=f(t)=\begin{cases}0.20, & 0<t\leqslant 3,\\ 0.20+0.10\{[t-3]+1\}, & t>3,\ 3t\neq 4,5,6,\cdots,\\ 0.20+0.10(t-3), & t=4,5,6,\cdots\end{cases}$$

其中 $[t-3]$ 是取整函数.

上面两个案例虽然实际意义不同，但都有共同的特性.它们都表达了在某一过程中，一个变量的变化和取值决定着另一变量的变化和取值，这两个变量之间的关系，我们称为函数关系.

1.函数的定义

定义 1（函数）　设有两个变量 x 和 y，若变量 x 在实数的某一范围 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的规律 f 有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是定义在集合 D 上的变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)\ ,x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量（或函数），自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域.

对于确定的自变量 $x_0\in D$，函数 $y=f(x)$ 与之对应的变量 y 的值 y_0 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为

$$y_0=f(x_0)\ \text{或}\ y|_{x=x_0}=y_0$$

当自变量 x 在定义域 D 内遍取所有数值时，对应的函数值构成的集合称为函数的值域，记为 R_f .

【例 1－1】 求函数 $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，x 必须同时满足不等式 $1-x\geqslant 0$ 且 $1+x\neq 0$.解不等式，得函数的定义域为 $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1]$.

【例 1－2】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解　因为 $-\pi\in[-4,\ 1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；

因为 $1\in[1,\ 3)$，所以 $f(1)=1$；

因为 $3.5\in[3,\ +\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$；

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,\ +\infty)$.

2.函数的两个要素

由函数的定义可知，对应规律 f 和定义域 D 是函数的两个要素，两个函数相同的充分

必要条件是其定义域 D 、对应规律 f 分别相同.

【例 1-3】判断下列函数是否相同：

(1) $y=x+1$ 与 $y=2x-1$；　　(2) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$；

(3) $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解　(1) 因为两个函数的定义域虽相同，但对应规律不同，所以不是同一函数；

(2) 因为两个函数的定义域和对应规律都相同，所以是同一函数；

(3) 因为函数的定义域虽相同，但对应规律不同，所以不是同一函数.

四、函数的几个特性

1.有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对一切 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界，如图 1-3 所示.

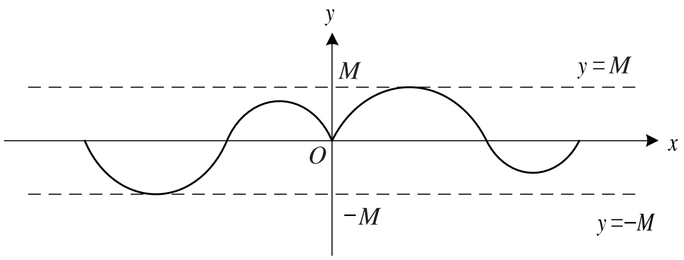


图 1-3

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立.

注意：函数的有界性与其讨论的定义区间有关.

2.单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，x_1 和 x_2 是区间 I 内任意两点，并且 $x_1<x_2$，则

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少.

相应地，I 称为函数 $f(x)$ 的单调增加（或减少）区间.单调增加函数，单调减少函数统称为单调函数.

单调增加函数，其相应的曲线随 x 增大而上升；单调减少函数，其相应的曲线随 x 增大而下降，如图 1-4（a）和图 1-4（b）所示.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；又如 $y=x^3$ 在其整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

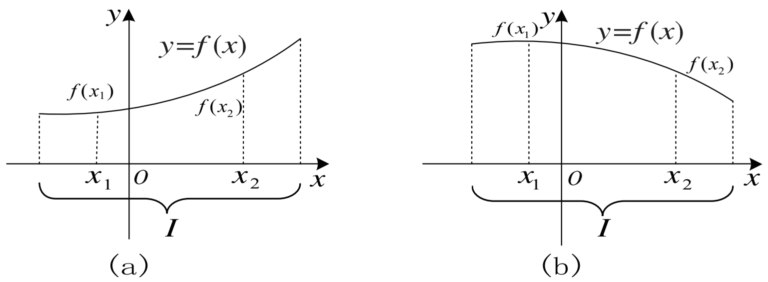


图 1－4

如果将 $f(x_1)<f(x_2)$ 和 $f(x_1)>f(x_2)$ 改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 和 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调不减和单调不增的.单调不减和单调不增函数也称为单调函数.

3.奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 内有定义，如果对于任意的 $x\in D$，总有

(1) $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1－5（a）和图 1－5（b)所示.

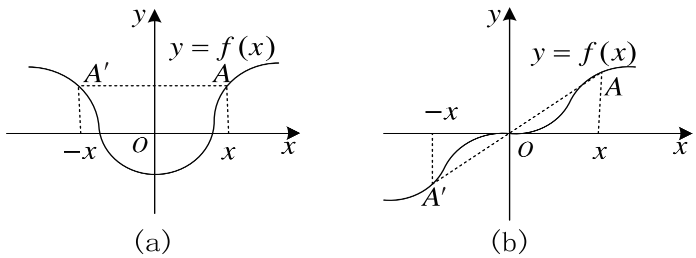


图 1－5

例如，$y=x^2+1$ 与 $y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数，$y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数.

4.周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对任意的 $x\in D$（$x+T\in D$），总有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为函数 $f(x)$ 的周期.通常我们所说的函数 $f(x)$ 的周期是指 $f(x)$ 的最小正周期.

周期为 T 的函数，在其定义域内长度为 T 的区间上，函数的图形具有相同的形状，如图 1－6 所示.

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周

期的函数.

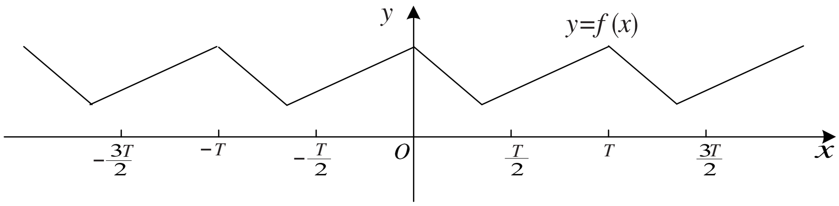


图 1－6

五、初等函数

1.基本初等函数

以下五类函数，称为基本初等函数.

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为实数）；

（2）指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

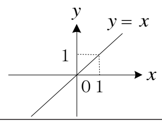
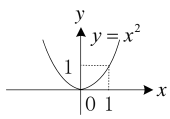
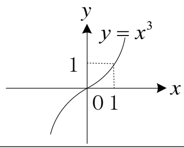
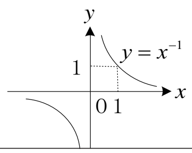
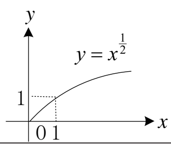
（3）对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

（4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

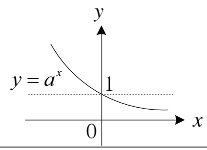
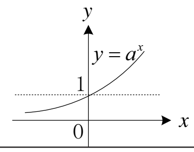
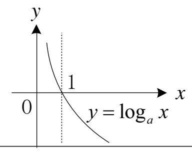
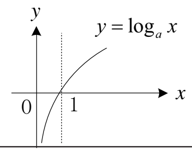
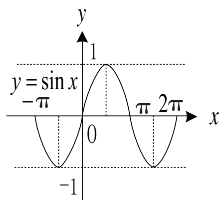
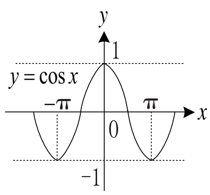
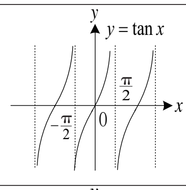
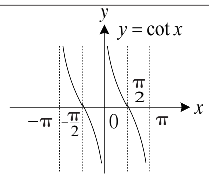
（5）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

为了方便起见，很多时候也把多项式函数 $y=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{1}x+a_{0}$ 看作基本初等函数，这些函数是研究其他函数的基础.

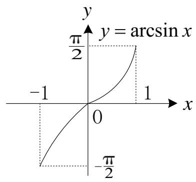
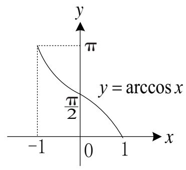
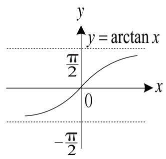
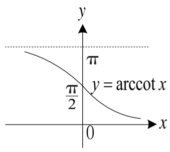
下面将一些常用的基本初等函数的定义域、值域和特性列表说明如下：

函数类型	函数	定义域值域	图形	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数， 单调增加
	$y=x^{2}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数， 在$(-\infty,0)$内单调减少， 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{3}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数， 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数， 在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表

函数类型	函数	定义域值域	图形	特性
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)$内单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加（$k\in\mathbf{Z}$）
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$） $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调增加（$k\in\mathbf{Z}$）
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$） $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少（$k\in\mathbf{Z}$）

续表

函数类型	函数	定义域值域	图形	特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1, 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数， 单调增加， 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1, 1]$ $y\in[0, \pi]$		单调减少， 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数， 单调增加， 有界
	$y=\text{arccot}\, x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[0, \pi]$		单调减少， 有界

2.复合函数

定义 2（复合函数） 设函数 $y=f(u)$ ，$u=\varphi(x)$ ，如果 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分属于 $y=f(u)$ 的定义域，则 y 通过 u 是 x 的函数，这个函数称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量，x 为自变量.

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y=\ln u$ ，$u=-2-x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-2-x^2$ 的值域是 $(-\infty, -2]$ ，而 $y=\ln u$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ，二者的交集是空集，因此不能复合.

【例 1-4】 已知 $y=\ln u$ ，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数.

解 因为 $y=\ln u$ ，而 $u=x^2$，u 是中间变量，所以 $y=\ln u=x^2$.

【例 1-5】 已知 $y=u^2$，$u=\sin v$ ，$v=\dfrac{x}{2}$ ，试把 y 表示为 x 的函数.

解 不难看出，这里的 u 、v 分别是中间变量，所以 $y=u^2=\sin^2 v=\sin^2\dfrac{x}{2}$.

【例 1-6】 写出由函数 $y=\log_2 u$ ，$u=1-v$ ，$v=e^x$ 构成的复合函数，并求其定义域.

解 所求的复合函数为 $y=\log_2(1-e^x)$.由对数函数的定义域可知，所求符合函数的定义域为 $(-\infty, 0)$.

【例 1-7】 分解下列符合函数：

（1）$y=a^{x^2}-1$；（2）$y=\cos^{99}x$ ；（3）$y=e^{\sin(2x+3)}$ ；（4）$y=\sqrt{\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

解　(1) 函数 $y=a^{x^2}-1$ 可以分解为 $y=a^u$，$u=x^2-1$；

(2) $y=\cos^{99}x$ 可以分解为 $y=u^{99}$，$u=\cos x$；

(3) $y=e^{\sin(2x+3)}$ 可以分解为 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=2x+3$；

(4) $y=\sqrt{\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ 可以分解为 $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=1+\dfrac{1}{x}$.

3.初等函数

定义 3（初等函数）　由常数和基本初等函数，经过有限次四则运算和有限次复合而成的，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\dfrac{x^2+\sin(2x-1)}{x}$，$y=\ln\sqrt{a^2+x^4}$，$y=\cos^2x$ 都是初等函数，分段函数不是初等函数，如符号函数.

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$ 和绝对值函数 $$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$ 不是初等函数.

六、常用的经济函数

1.需求函数

需求是指消费者在某一特定时期内，在各种可能的价格水平下愿意并能够购买的商品数量，影响需求的因素很多. 如果除价格 P 外，其他影响因素都不变，则价格 P 是决定需求量 Q_d 的唯一因素，可认为 Q_d 是 P 的函数，称为需求函数，记作

$$Q_d=f(P)\ ,P\geqslant 0$$

通常假设需求函数是单调减少的，即商品的需求量随价格的上升而减少，随价格的下降而增加，需求函数的图形称为需求曲线，如图 1－7 所示. 需求函数的反函数 $P=f^{-1}(Q)$（Q_d 和后面的 Q_s 有时都用 Q 表示）在经济学中也称为需求函数.

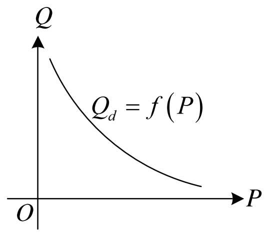


图 1－7

2. 供给函数

供给是指生产者在某一特定时期内，在各种可能的价格水平下，愿意并能够提供的某种商品的数量，影响供给的因素很多.如果除价格 P 外，其他影响因素都不变，则价格 P 是决定需求量 Q_s 的唯一因素，可认为 Q_s 是 P 的函数，称为供给函数，记作

$$Q_s=g(P)\ ,P\geqslant 0$$

通常假设供给函数是单调增加的，即商品的供给量随价格的上升而增加，随价格的下降而减少. 供给函数的图形称为供给曲线，如图 1－8 所示. P_0 在经济学上应理解为，只有当价格超过 P_0 时，生产者才开始提供产品.

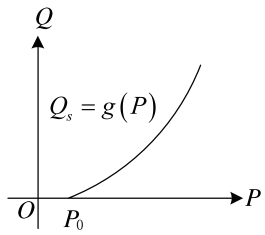


图 1－8

市场上使得某种商品的需求量与供给量一致时的商品数量称为均衡数量，此时商品的价格称为均衡价格. 相应地，当 $Q_d > Q_s$ 时，称 $Q_d - Q_s$ 超额需求；当 $Q_s > Q_d$ 时，称 $Q_s - Q_d$ 超额供给. 市场上商品供过于求（$Q_s > Q_d$）时，价格下降；供不应求（$Q_d > Q_s$）时，价格上升.

【例 1－8】 已知商品的供给函数是 $Q_s = 2P - 4$，需求函数是 $Q_d = 50 - 4P$，试求该商品的均衡价格和均衡数量.

解 由均衡条件 $Q_d = Q_s$，得 $2P - 4 = 50 - 4P$，

解方程得市场的均衡价格 $P = 9$，均衡数量为 $Q = Q_d = Q_s = 14$.

当该商品的价格低于 9 时，需求大于供给；当该商品的价格高于 9 时，供给大于需求.

3.成本函数

（1）总成本函数. 总成本是指厂商生产一定量产品所需要的成本总额，它包括固定成本和可变成本.

固定成本是指在一定的产量范围内，不随产量变动而变动的成本，如厂房或设备的租金、固定资产折旧、管理人员的工资等；可变成本是指随着产量的变动而变动的成本，如原材料和燃料的费用等.

假设用 Q 表示产品数量，C 表示总成本，FC 表示固定成本，VC 表示可变成本，则 C 和 Q 之间关系可以表示为

$$C = C(Q) = FC + VC(Q)$$

该函数称为总成本函数.

通常情况下，总成本函数是单调增加的，因为其中的可变成本随产量的增加而增加，总成本必然随之增加；固定成本非负.

（2）平均成本. 平均成本是指生产每一单位产品平均所需要的成本，它等于总成本除以产量.若用 AC 表示平均成本，则平均成本函数为

$$AC = \frac{C(Q)}{Q}, Q > 0$$

【例 1－9】 设生产某种产品的固定成本为 20 万元，每生产一件产品需要增加 0.5 万元，试写出总成本函数和平均成本函数.

解 由题意知，固定成本 $FC = 20$，可变成本 $VC = 0.5Q$.

所以总成本函数为

$$C = C(Q) = 20 + 0.5Q$$

平均成本函数为

$$AC = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{20 + 0.5Q}{Q} = \frac{20}{Q} + 0.5$$

4.收益函数

（1）总收益函数. 总收益是指厂商出售产品（或提供服务）得到的全部货币收入，即产品的价格与销售量的乘积.如果用 R 表示总收益，P 表示产品的销售价格，Q 表示销售量，则总收益 R 与销售量 Q 之间的关系可以表示为

$$R=R(Q)=P\cdot Q=f^{-1}(Q)\cdot Q$$

该式称为总收益函数.显然，$R(0)=0$，即未出售商品时，总收益为 0.

（2）平均收益函数. 平均收益是指厂商出售每单位产品所获得的平均收入，它等于总收益 R 除以产品的销量 Q . 若用 AR 表示平均收益，则平均收益函数可以表示为

$$AR=AR(Q)=\frac{R(Q)}{Q}=\frac{P\cdot Q}{Q}=f^{-1}(Q)$$

5.利润函数

利润是指生产中获得的总收益与投入的总成本之间的差额.若用 L 表示利润，则利润函数可以表示为

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

【例 1-10】 设生产某种产品的固定成本为 40 000 元，每生产一件产品需要增加 100 元，产品的需求函数是 $P=400-\frac{1}{2}Q$ ，试求总收益函数和利润函数.

解 由题意知，固定成本 $FC=40\ 000$，可变成本 $VC=100Q$.

所以总成本函数为

$$C=40\ 000+100Q$$

总收益函数为

$$R=P\cdot Q=\left(400-\frac{1}{2}Q\right)\cdot Q=400Q-\frac{1}{2}Q^2$$

从而利润函数为

$$\begin{aligned}L&=L(Q)=R(Q)-C(Q)\\&=\left(400Q-\frac{1}{2}Q^2\right)-(40\ 000+100Q)=300Q-\frac{1}{2}Q^2-40\ 000\end{aligned}$$

习题 1-1

（1）下列各题中的两个函数是否相同，为什么？

① $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$ ；

② $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$ ；

③ $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ ；

④ $f(x)=\sqrt{x}$ 与 $g(x)=x^2+1$.

（2）求下列函数的定义域.

① $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ ； ② $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ ；

③ $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$ ； ④ $y=\arccos(3-x)$.

（3）已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ ，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ，$f[f(x)]$.

(4) 已知函数 $f(x)=4x^2-2x+1$，求 $f(x)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(-x)$，$f(s-t)$ 的值.

(5) 若 $f(0)=-2$，$f(3)=19$，求线性函数 $f(x)=ax+b$，并求 $f(1)$，$f(-2)$.

(6) 确定下列函数的奇偶性.

① $f(x)=x^4-2x^2+1$； ② $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；

③ $f(x)=e^{-x^2}+x$； ④ $f(x)=\cos(\lg x)$.

(7) 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数.

① $y=\sqrt{u}$，$u=x^3+1$；

② $y=10^u$，$u=\sin x+x$；

③ $y=\ln u$，$u=3^v$，$v=\sin x$；

④ $y=\arctan u$，$u=v^2$，$v=e^w$，$w=1+x^2$.

(8) 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

① $y=\sqrt{3x+2}$； ② $y=a^{-2x}$；

③ $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$； ④ $y=\lg^2\arccos x$.

(9) 已知某时期内某种商品的需求函数为 $Q_d=50-5P$，供给函数为 $Q_s=-10+5P$，求均衡价格和均衡数量.

(10) 假设某厂的总成本函数是 $C(Q)=Q^3-10Q^2+12Q+12$，则该厂的固定成本、可变成本和平均成本分别是什么？

(11) 已知某种产品的需求函数为 $P=10-\dfrac{1}{5}Q$，固定成本为 50 元，每生产一单位产品，成本增加 2 元. 求总收益函数、平均收益函数、总利润函数以及产量为 10 单位时的总利润.

第二节　极限

在实际问题中，当我们建立了变量之间的函数关系后，有时还需要考察变量的变化规律，特别是考察变量在某个变化过程中的变化趋势.

一、数列的极限

【案例 1-4】我国魏晋时期的数学家刘徽通过等分圆周求圆内接正多边形的面积，进而推导出圆的面积公式. 这就是极限思想在几何上的应用.

设有一圆，先作它的内接正三角形，其面积记作 S_1；再作内接正六边形，其面积记作 S_2；再作内接正十二边形，其面积记作 S_3；照此下去，得到一系列圆的内接正多边形的面积：

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, S_n, \cdots$$

这些面积构成一个数列，n 越大，S_n 就越接近圆的面积 S. 设想 n 无限增大，则 S_n 也无限接近于 S. 我们称 S 为数列 $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, S_n, \cdots$ 当 n 无限增大时的极限，也说这个数列的极限是 S. 应当指出的是，无论 n 如何大，S_n 只能和 S 无限接近而不会等于 S，

也不会大于 S，这正是极限思想的关键所在.

定义 4（数列的极限）　对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，数列的一般项 x_n 无限地接近于某一个常数 A，则称常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或者 } x_n\to A\ (n\to\infty)$$

前式读作"当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，x_n 的极限等于 A"；后式读作"当 n 趋于无穷大时，x_n 趋于 A".

如果数列没有极限，则称数列是发散的.

【例 1-11】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

【例 1-12】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$$

【例 1-13】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

解　由于 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$，当 $n\to\infty$ 时，$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\to\infty$，从而 $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\to 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=0$$

二、函数的极限

1.当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

当自变量 $x\to\infty$，是指 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，它包含以下两种情况：

(1) $x\to+\infty$，表示 $x>0$，$|x|$ 无限增大；

(2) $x\to-\infty$，表示 $x<0$，$|x|$ 无限增大.

考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限. 由图 1-9 可以看出，当 x 取正值而绝对值逐渐增大（即 $x\to+\infty$）时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 图形上相应的点沿着曲线 $f(x)$ 逐渐接近 x 轴；当 x 取负值而绝对值逐渐增大（即 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 图形上相应的点沿着曲线 $f(x)$ 也逐渐接近 x 轴，即当 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于 0. 因此，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$.

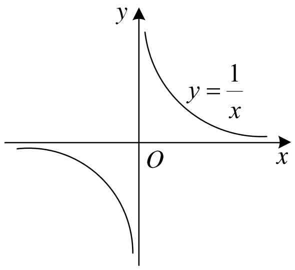


图 1－9

对于这种变化过程，给出下列定义：

定义⑤（当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限） 如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时存在极限 A，称常数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时存在极限 A，称常数 A 为当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{（或 }\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{）}$$

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$．

【例 1－14】 作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图形，并判断下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$；　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$．

解 分别作出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图形，如图 1－10 所示. 从图形可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$；$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

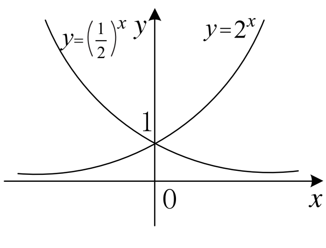


图 1－10

【例 1－15】 讨论函数 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 当 $x\to\infty$ 的极限.

解 函数 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 的图形如图 1－11 所示.

从图形可以看出，当 $x \to +\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x^2}\to 1$；

当 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x^2}\to 1$. 因此，当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$ 无限地接近于常数 1，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.

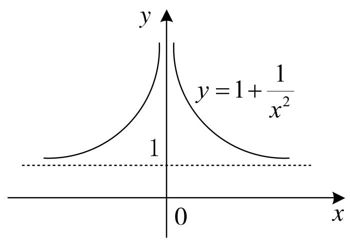


图 1－11

2.当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

自变量 $x\to x_0$ 是指沿 x 轴 x 从 x_0 的两侧向 x_0 无限接近，包括两种情况：

(1) $x\to x_0^+$，表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0；

(2) $x\to x_0^-$，表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

先考察两个例子，观察当 $x\to 2$ 时，函数 $y=x+1$ 的变化趋势（图 1－12）. 本例中函数 $y=x+1$ 在 $x=2$ 有定义.从图 1－12 可以看出，无论 x 从小于 2 的方向趋近于 2，还是从大于 2 的方向趋近于 2，函数 $y=x+1$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向愈来愈接近于 3，所以说，当 $x\to 2$ 时，$y=x+1\to 3$.

函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$，在 $x=1$ 处函数没有定义. 从图 1－13可以看出，自变量 x 无论从小于 1 的方向趋近于 1，还是从大于 1 的方向趋近于 1，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的值都从两个不同的方向愈来愈接近于 2. 我们研究当 x 趋近于 1 时函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势，并不计较函数在 $x=1$ 处是否有定义，而是关心函数在 $x=1$ 的邻域（特别是 $x\in \mathring{U}(1, \delta)$）的函数值的变化趋势. 因此，对于这个例子，仍说当 $x\to 1$ 时，$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}\to 2$.

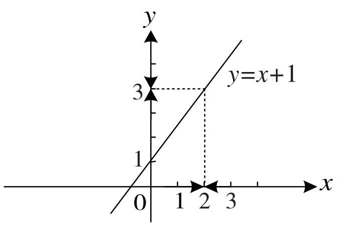


图 1－12

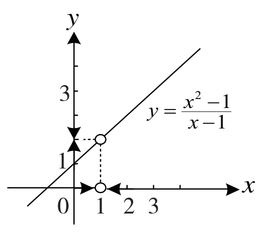


图 1－13

对于上面两个例子函数的变化趋势，给出如下定义：

定义 6（$x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内（点 x_0 可以除外）有定义，如果当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A\ (x \to x_0)$$

类似地，(1) 如果 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0（即 $x \to x_0^+$），函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在右极限 A，称数 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或简记为 } f(x_0 + 0) = A \text{ 或 } f(x) \to A\ (x \to x_0^+)$$

(2) 如果 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0（即 $x \to x_0^-$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在左极限 A，称数 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或简记为 } f(x_0 - 0) = A \text{ 或 } f(x) \to A\ (x \to x_0^-)$$

函数 $f(x)$ 的左、右极限统称为单侧极限.

显然，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

【例 1-16】 求下列极限.

(1) $f(x) = x$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$；　　(2) $f(x) = C$（C 为常数），$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

解 (1) 因为当 $x \to x_0$ 时，$f(x) = x$ 的值无限趋近于 x_0，所以有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

(2) 因为当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 C，所以

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} C = C$$

由此可见，常数的极限是其本身.

【例 1-17】 已知 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 2, \\ 2 & x < 2, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$，$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2$，即 $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$，所以

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

【例 1-18】 考察分段函数：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

在 $x \to 1$ 时的极限.

解 如图 1-14 所示，因为 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$，$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2$，即 $f(x)$ 在 $x \to 1$ 时的左、右极限不相等，因此 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在.

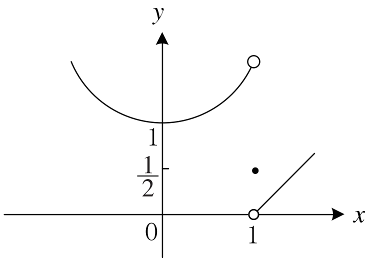


图 1－14

【例 1－19】考察 $x \to 0^+$ 时，函数 $y=\ln x$ 的极限是否存在.

解　由图 1－15 可以看出，当 $x \to 0^+$ 时，函数 $y=\ln x$ 取负值，且其绝对值无限增大，即当 $x \to 0^+$ 时，函数 $y=\ln x$ 的极限不存在，记作 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

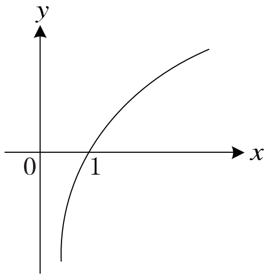


图 1－15

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ 的几何意义是，曲线 $y=\ln x$ 在 $x=0$ 的右侧沿着 y 轴的负方向无限延伸时，与直线 $x=0$ 越来越接近. 一般地，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 成立，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线. 在此，我们也给出水平渐近线的概念. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是无限区间，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=C$ ，则直线 $y=C$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

习题 1－2

（1）观测下列数列当 $n \to \infty$ 时的变化趋势，存在极限的写出极限.

① $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$ ；　　② $x_n=\dfrac{n}{3n+2}$ ；

③ $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$ ；　　④ $x_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

（2）求下列数列的极限.

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n^2}$ ；　　② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2}\right)$ ；

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}$ ；　　④ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

（3）求下列函数的极限.

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ ；　　　② $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{3}}$ ；

③ $\lim\limits_{x\to1}\ln x$ ；　　　④ $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$.

(4) 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ \sin x, & x<0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2}+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ，问 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在？

第三节　极限的运算法则

前面我们介绍了函数极限的概念，求出了一些简单函数的极限.要想求出结构较为复杂的函数极限，就要使用函数极限的四则运算法则.

如果 $\lim f(x)=A$ ，$\lim g(x)=B$ ，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$ ；

特别地，若 $\lim f_i(x)(i=1，2，\cdots，n)$ 都存在，则

$$\lim[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim f_1(x)\pm\lim f_2(x)\pm\cdots\pm\lim f_n(x) .$$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$ ；

特别地，①若 $\lim f(x)=A$ ，C 为常数，则 $\lim C\cdot f(x)=C\cdot\lim f(x)=C\cdot A$ ；

②若 $\lim f(x)=A$ ，$n\in\mathbf{Z}^{+}$，则 $\lim[f(x)]^{n}=[\lim f(x)]^{n}=A^{n}$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

【例 1-20】 求 $\lim\limits_{x\to1}(3x^{2}+2x-4)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to1}(3x^{2})+\lim\limits_{x\to1}(2x)+\lim\limits_{x\to1}(-4)=3\lim\limits_{x\to1}x^{2}+2\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}(-4)$

$$=3(\lim_{x\to1}x)^{2}+2\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}(-4)=3\times1+2\times1-4=1.$$

从本例的计算知，对多项式 $P_n(x)=a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq0)$ ，有

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=a_0x_0^{n}+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n$$

【例 1-21】 求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^{2}-4}{x^{2}+2x-8}$.

解　显然，分子、分母的极限都是 0，不能直接用商的极限公式.当 $x\to2$ 时，由于分子与分母都有一个以 0 为极限的公因子 $x-2$，可以将分子与分母因式分解，约去公因子 $x-2$ 后，再求极限.

$$原式=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to2}(x+4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} .$$

【例 1-22】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{3}+x^{2}+4}{3x^{3}+1}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{1}{3}$.

用同样的方法可得公式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_m}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-1-m}+\cdots+a_{n-1}x^{1-m}+a_nx^{-m}}{b_0+b_1x^{-1}+\cdots+b_{n-1}x^{1-m}+b_mx^{-m}}=\begin{cases}0, & m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

其中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, m$ 、n 为正整数.

【例 1－23】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

解　当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{2}{x^2-1}$ 均趋于无限大，因此，不能用极限的四则运算法则.应先进行通分，然后再求极限.

原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

【例 1－24】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解　因为当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x+1}$ 和 $\sqrt{x}$ 都无限增大，从而都没有极限，所以不能利用极限的四则运算法则求极限.须将其变形，然后再求极限.

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$.

对于复合函数的极限，有以下结论：设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.若 $\lim\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则有

$$\lim f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

这个结论对 $\lim\varphi(x)=\infty$，$\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$ 也成立.

习题 1－3

求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-x+4)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{3x^3+1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3x-1}{1-x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x-4}{\sqrt{x+1}-3}\right)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；

(9) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)$.

第四节　无穷大量与无穷小量

一、无穷大量

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. 由图 1－16 知，当 x 从 $x=1$ 的左、右两个方向无限趋近于 1 时，$f(x)$ 的绝对值都无限地增大. 对于这种变化趋势，我们给出以下定义.

定义 7（无穷大量）　如果 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么就称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

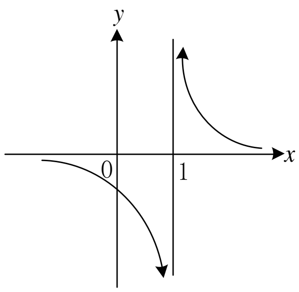


图 1－16

例如，当 $x\to 1$ 时，$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ 无限增大，所以 $\dfrac{1}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大.

上述 $x\to x_0$ 时的无穷大，很容易推广到 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时的情形.

例如，当 $x\to+\infty$ 时，2^x 总取正值且无限增大，所以 2^x 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大.

注意：(1) 一个函数 $f(x)$ 的无穷大，是与自变量 x 的变化过程紧密相连的，因此必须指明自变量 x 的变化过程.

(2) 不要把绝对值很大的常数说成是无穷大，无穷大表示的是一个函数，这个函数的绝对值在自变量某个变化过程中的变化趋势是无限增大.

二、无穷小量

1.无穷小的定义

考察函数 $f(x)=x-1$，由图 1－17 可知，当 x 从 $x=1$ 的左、右两个方向无限趋近于 1 时，$f(x)$ 都无限地趋向于 0. 对于这种变化趋势，我们给出以下定义.

定义 8（无穷小量）　如果 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 0，那么就称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，简称无穷小，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

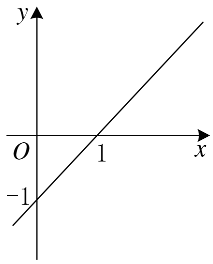


图 1－17

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以 $x-1$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小.

上述 $x\to x_0$ 时的无穷小，也能推广到 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时的情形.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x^2}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意：(1) 一个函数 $f(x)$ 的无穷小，是与自变量 x 的变化过程紧密相连的，因此必须指明自变量 x 的变化过程.

(2) 不要把绝对值很小的常数说成是无穷小，无穷小表示的是一个函数，这个函数在自变量某个变化过程中的极限为 0.

2.无穷小与函数极限的关系

定理 1　函数 $f(x)$ 在自变量的某个变化过程中，具有极限 A 的充要条件是函数 $f(x)$ 可以表示为 A 与一个自变量在这个变化过程时的无穷小之和.即

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim\alpha(x)=0$.

3.无穷小的性质

有关无穷小的运算有如下性质：

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

性质 2　有限个无穷小量的乘积为无穷小量.

性质 3　有界变量与无穷小量的乘积为无穷小量.

推论 1　常量与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

【例 1－25】 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以 x 是 $x\to 0$ 时的无穷小. 而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是一个有界函数.根据上述性质 3，可知 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

【例 1－26】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3}$.

解　显然，当 $x\to 0$ 时，函数 x，x^3，$5x$ 均趋向于 0，即它们都是无穷小，而

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}5=5$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$.

从该例题可以看出，无穷小量之商不一定是无穷小，这是两个无穷小量趋于 0 的速度可能不同.

3.无穷小量阶的比较

设 $\alpha(x)$ 、$\beta(x)$ 是同一变化过程中的两个无穷小量.

（1）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$（$c$ 是不等于零的常数），则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

（2）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

（3）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

（4）若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ ，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小，记作 $\beta(x)=o(\alpha(x))$
.

在上面的无穷小量 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的比较中，等价无穷小在极限的运算中最重要，从下面的定理可以看出.

定理 2 在自变量的某变化过程中，若 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$ ，$\beta(x)\sim\beta'(x)$ ，且 $\lim\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 存在，则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

在求极限时，分子、分母或函数中的乘积因式可用其等价无穷小来代替，若选取得当，可使计算大大简化.

常用等价无穷小：当 $x\to0$ 时，有

$\sin x\sim x$ ，$\tan x\sim x$ ，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\arctan x\sim x$ ，$\arcsin x\sim x$ ，

$\ln(1+x)\sim x$ ，$e^x-1\sim x$ ，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

【例 1－27】 计算下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan2x}{\sin5x}$ ；（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{\sin x}$ ；（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 （1）当 $x\to0$ 时，$\tan2x\sim2x$ ，$\sin5x\sim5x$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

（2）当 $x\to0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}x$ ，$\sin x\sim x$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$$

（3）当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$ ，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}$$

三、无穷大与无穷小的关系

无穷大与无穷小之间有着密切的关系，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大，它的倒数 $\dfrac{1}{f(x)}=x-1$ 则成为 $x\to 1$ 时的无穷小；而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，它的倒数 $\dfrac{1}{f(x)}=x-1$ 则成为 $x\to\infty$ 时的无穷大.总结这些规律，可得到下述定理.

定理 3　自变量在某变化过程中的无穷大量的倒数是无穷小，反之，自变量在某变化过程中不为 0 的无穷小量的倒数为一个无穷大.

【例 1－28】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x-1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+4}=0$，即 $\dfrac{x-1}{x+4}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小.根据无穷大与无穷小的关系可知，它的倒数 $\dfrac{x+4}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x-1}=\infty$.

习题 1－4

(1) 下列函数在其相应的变化过程中哪些是无穷大了？哪些是无穷小了？

① $\dfrac{1+3x}{x}$，当 $x\to 0$ 时；　　② e^x，当 $x\to-\infty$ 时；

③ e^x，当 $x\to+\infty$ 时；　　④ $\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$，当 $x\to-\infty$ 时.

(2) 求极限.

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos 2x}{x^2}$；　　② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$；　　④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$；

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+8}{3x^2+2}$；　　⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$.

第五节　两个重要极限

本节介绍两个重要极限，它们在极限运算中起着非常重要的作用.

一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

这个极限在形式上具有以下特点：

(1) 它的极限呈现 $\dfrac{0}{0}$ 型，不能应用商求极限的法则；

(2) 在分式中同时出现三角函数和 x 的幂.

该极限在实际应用中往往使用其推广形式：如果 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$（$a$ 可以是 x_0，$\pm\infty$

或∞），那么

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = \lim_{\varphi(x) \to 0} \frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1$$

【例 1－29】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

【例 1－30】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2 = \dfrac{1}{2} \times 1^2 = \dfrac{1}{2}.$

【例 1－31】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 3 \cdot \dfrac{\sin 3x}{3x} = 3 \times 1 = 3.$

【例 1－32】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 设 $\arcsin x = t$，则 $x = \sin t$，当 $x \to 0$ 时，$t \to 0$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

【例 1－33】 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{2} R^2 \sin \dfrac{2\pi}{n}$.

解 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{2} R^2 \sin \dfrac{2\pi}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \pi R^2 \dfrac{\sin \dfrac{2\pi}{n}}{\dfrac{2\pi}{n}} = \pi R^2 \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sin \dfrac{2\pi}{n}}{\dfrac{2\pi}{n}} = \pi R^2.$

二、$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

该极限的特点是，如果在形式上分别对底和幂求极限，呈现的是 1^∞ 形式. 这个重要极限也可推广和变形.

（1）令 $\dfrac{1}{x} = t$，则当 $x \to \infty$ 时，$t \to 0$，代入 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 后得

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}$$

（2）如果 $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$（$a$ 可以是 x_0，$\pm\infty$ 或 ∞），那么

$$\lim_{x \to a} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \lim_{\varphi(x) \to \infty} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \mathrm{e}$$

或若 $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$（$a$ 可以是 x_0，$\pm\infty$ 或 ∞），那么

$$\lim_{x \to a} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \lim_{\varphi(x) \to 0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e}$$

【例 1－34】 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}=e^{-3}$.

【例 1-35】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{e}$.

【例 1-36】求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}=e$.

【例 1-37】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+4}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{4}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{4}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4}=e^{\frac{1}{2}}\cdot1^{4}=e^{\frac{1}{2}}.$$

三、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 在经济上的应用

1.复利公式

设有本金 A_0，以年利率 r 贷出，一年为 1 期计算利息，若以复利计息，那么

一年末的本利和为：$A_1=A_0(1+r)$；

两年末的本利和为：$A_2=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2$；

如此反复，t 年末的本利和为：$A_t=A_0(1+r)^t$.

下面对 t 年末的本利和公式 $A_t=A_0(1+r)^t$ 分两种情况进行讨论：

（1）若一年均匀计息 n 期，且每期利率为 $\dfrac{r}{n}$.在这种情况下，可以推出 t 年末的本利和为

$$A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

这是一年均匀计息 n 期，t 年末的本利和 A_t 的复利公式，该复利公式是按离散情况计算利息的复利公式.

（2）若一年的计息次数 n 无限增加，即 $n\to\infty$，这种计息方式是按连续复利计算利息的. 因为

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=A_0e^{rt}$$

所以，t 年末的本利和 A_t 的复利公式为

$$A_t=A_0e^{rt}$$

【例 1-38】某公司投资 100 000 元，年利率 12%，有三种投资方案：

（1）一年支付一次红利；

（2）一年分 12 个月按复利支付红利；

（3）一年按连续复利支付红利. 问这三种方案哪种对公司有利？

解 (1) 一年支付一次红利，由复利公式 $A_t=A_0(1+r)^t$ 知，一年末的本利和为

$$A_1=100\ 000\ (1+12\%)=112\ 000\ (元)$$

(2) 一年分 12 个月按复利支付红利，由复利公式 $A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ 知，一年末的本利和为

$$A_1=100\ 000\left(1+\frac{12\%}{12}\right)^{12\times 1}\approx 100\ 000\times 1.126\ 825=112\ 682.5\ (元)$$

(3) 一年按连续复利支付红利，，由复利公式 $A_t=A_0e^{rt}$ 知，一年末的本利和为

$$A_1=100\ 000e^{0.12\times 1}\approx 112\ 749.7\ (元)$$

由上述计算可知，三个方案中，第三个方案（一年按连续复利支付红利）合算.

2.贴现公式

与复利问题相反的问题是贴现问题.

已知未来值 A_t，求现值 A_0，此时的利率 r 称为贴现率.

若以一年为 1 期贴现，贴现公式为

$$A_0=A_t(1+r)^{-t}$$

若一年均分 n 期贴现，贴现公式为

$$A_0=A_t\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}$$

由连续复利公式，连续贴现公式为

$$A_0=A_te^{-rt}$$

【例 1－39】 设年利率为 6%，现投资多少元，10 年末可得 120 000 元?

(1) 按离散情况计算利息，每年计息 4 期；

(2) 按连续复利计算.

解 (1) 由公式 $A_0=A_t\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}$ 得

$$A_0=120\ 000\times\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{-4\times 10}\approx\frac{120\ 000}{1.814\ 02}\approx 66\ 151.4\ (元)$$

(2) 由 $A_0=A_te^{-rt}$ 得

$$A_0=120\ 000\times e^{-0.06\times 10}\approx 65\ 857.4\ (元)$$

习题 1－5

(1) 计算下列极限.

① $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{5x}$；　② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}$；　③ $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}$；

④ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 ax}{x^2}$；　⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$；　⑥ $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$；

⑦ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+2}$；　⑧ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{x}$.

(2) 某工厂 2010 年元月 1 日贷款 40 万元购置一套新设备，以复利计息，年利率 4%，到 2019 年 12 月 31 日到期一次性还本付息，试确定贷款到期时还款总额.

①若一年计息 4 期；　②若按连续复利计息.

（3）一台机器价格 30 万元，预计该机器第一年可创利润 10 万元，以后每年递减 1 万元，使用期为 8 年，若银行利率 10%，试计算该机器所创利润的现在值，并与其价格比较，看购买此机器是否合算？

第六节 函数的连续性

自然界和生活中的很多现象是连续变化的，所谓连续就是不间断. 例如，物体运动的路程是随时间连续增加的；一天中的气温也是随时间连续变化的等. 这些现象中两个变量的关系如果用函数表示，其连续变化的现象就表现为函数的连续性. 连续性是函数的重要性质之一，其几何图形是一条连绵不断的曲线.

一、函数的增量

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量由 x_0 变化到 x（$x\neq x_0$）时，自变量的改变量 $x-x_0$ 称为自变量 x 在 x_0 处的增量，记作 Δx，即 $\Delta x=x-x_0$. 当 $x>x_0$ 时，$\Delta x>0$；当 $x<x_0$ 时，$\Delta x<0$.

此时，相应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，其改变量 $f(x)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 点 x_0 处的增量，记作 Δy，即 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$.

由于 $\Delta x=x-x_0$，所以 $x=x_0+\Delta x$，从而 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

在几何上，函数的增量表示当 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$，曲线 $y=f(x)$ 对应点的纵坐标的增量如图 1－18 所示.

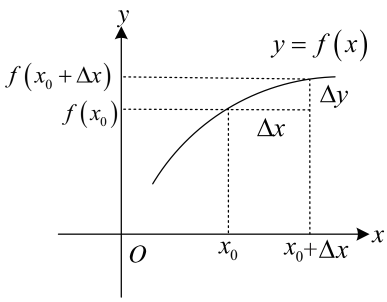


图 1－18

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，几何上表现为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处不断开，用增量来描述，就是当自变量的增量 Δx 趋于 0 时，函数的增量 Δy 也趋于 0.

二、函数的连续性

1.函数在一点处连续

基于上面关于自变量的增量、函数的增量与函数在一点连续的关系的讨论，给出函数在一点连续的定义.

定义 9（函数在一点处连续） 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若在 x_0 处当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋近于 0 时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

也趋近于 0，即

$$\lim_{\Delta \to 0}\Delta y = 0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，并称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

上述定义中的 $\Delta x \to 0$ 等价于 $x \to x_0$，$\Delta y \to 0$ 等价于 $f(x) \to f(x_0)$.因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续也可以如下定义.

定义 10（**函数在一点连续**） 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在且等于函数在 x_0 处函数值 $f(x_0)$ ，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，并称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

上面关于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的两个定义是等价的，它们的实质是相同的，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件：

（1） 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义；

（2） 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ；

（3） 极限值等于函数值，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数的连续性是由极限来定义的，而极限有左极限和右极限，相应地，我们可以定义左连续和右连续.

定义 11（**左连续、右连续**） 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续；如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

根据函数在一点的连续、左连续和右连续的定义知：

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

【**例** 1-40】讨论函数 $f(x)=x^2+3$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解 函数 $f(x)=x^2+3$ 在点 $x=1$ 的邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2+3)=4$，而 $f(1)=4$，所以 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

因此，函数 $f(x)=x^2+3$ 在点 $x=1$ 处连续.

【**例** 1-41】设函数 $f(x)=\begin{cases} x-2, & -1<x<0, \\ 3x^2+1, & 0 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 这是分段函数，$x=0$ 是其分界点.因为 $f(0)=1$，又

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x-2) = -2 \neq f(0) ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(3x^2+1) = 1 = f(0)$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续，但不左连续，从而它在 $x=0$ 处不连续.

2.连续函数

定义 12（**连续函数**） 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都是连续的，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，或者说 $y=f(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数.

如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义，在开区间 (a, b) 内连续，且在区间的端点 $x=a$ 处右连续，$x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，或者说 $y=f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数.

连续函数的图形是一条连续不断的曲线，如图 1－19 所示.

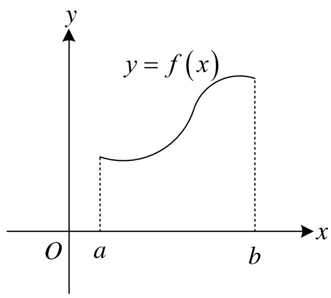


图 1－19

3.连续函数的运算

根据函数在一点连续的定义和极限的四则运算法则，可得到下述定理.

定理 4（连续函数的四则运算）　若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x_0)\neq 0$）在点 $x=x_0$ 处连续.

注意：连续函数和、差、积的四则运算可以推广到有限个函数的情形.

定理 5（复合函数的连续性）　设函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，而 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

推论 2　设 $\lim\varphi(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，则

$$\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]$$

定理 6（初等函数的连续性）　一切初等函数在其定义区间都是连续的.

【例 1－42】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\cos x+\ln x}{2^x\sqrt{1+x^2}}$.

解　由于该函数是初等函数，且 $x=1$ 是其定义域中的一点，故由初等函数的连续性，得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2\cos x+\ln x}{2^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{1^2\cos 1+\ln 1}{2^1\sqrt{1+1^2}}=\frac{\cos 1}{2\sqrt{2}}$$

4.闭区间上连续函数的性质

下面给出定义在闭区间上连续函数的性质.

定理 7（最大值和最小值定理）　闭区间上的连续函数必能取到最大值和最小值.

从几何直观上看，如图 1－20 所示，因为闭区间上的连续函数的图形是包括两个端点的一条不间断的曲线，因此它必定有最高点 P 和最低点 Q，P、Q 的纵坐标正是函数的最大值和最小值.

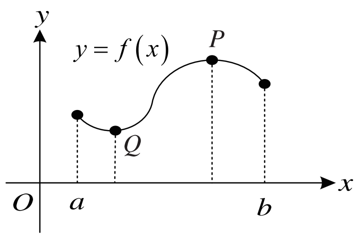


图 1－20

如果函数仅在开区间 (a, b) 或半开半闭区间 $[a, b)$，$(a, b]$ 内连续，或函数在闭区间上有没有定义的点，那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.

例如，函数 $y=x$ 在开区间 (a, b) 内是连续的，这个函数在该区间内既无最大值，也无最小值，如图 1-21 所示.

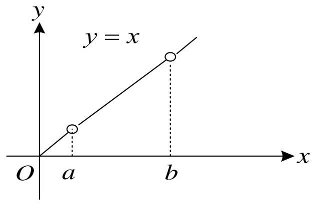


图 1-21

定理 8（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(\xi)=C$$

这个定理的几何意义是，如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则直线 $y=C$（C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间）与曲线 $y=f(x)$（$a \leqslant x \leqslant b$）至少有一个交点，如图 1-22 所示.

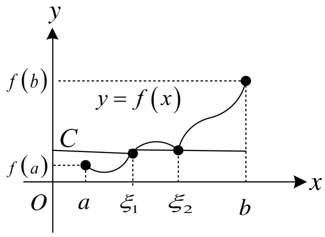


图 1-22

推论 3（根的存在性定理） 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一个 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(\xi)=0$$

即方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a, b) 内至少有一个根 ξ，ξ 又称为函数 $y=f(x)$ 的零点，所以“根的存在性定理”又称“零点定理”.

该推论的几何意义是，如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点，如图 1-23 所示.

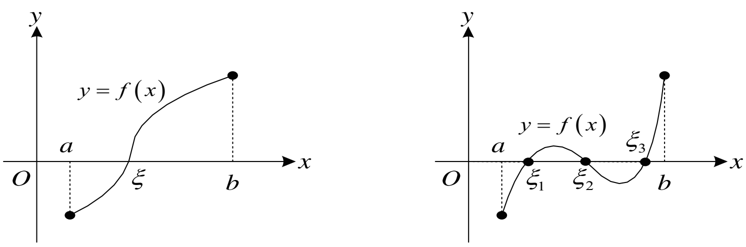


图 1-23

推论 4　闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值（M 和 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值）.

【例 1-43】 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

解　令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，又因 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，根据零点定理，至少存在一点 $\xi\in(0, 1)$，使得

$$f(\xi)=0$$

即方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根 ξ.

【例 1-44】 证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

解　方程 $x=\cos x$ 等价于方程 $x-\cos x=0$. 令 $f(x)=x-\cos x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，又因 $f(0)=-1<0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0$，根据零点定理，至少存在一点 $\xi\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$f(\xi)=0 .$$

即方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根 ξ.

三、函数的间断点

1.间断点的概念

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

由函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续满足的三个条件可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 间断可能有以下三种情形：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；

（2）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

2.间断点的分类

根据函数在间断点附近的变化特征，将间断点分为以下两种类型：

（1）第一类间断点. 设点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

在第一类间断点中，如果左、右极限存在但不相等，这种间断点又称为跳跃间断点；如果左、右极限存在且相等（即极限存在），但函数在该点没有定义，或者虽然函数在该点有定义，但函数值不等于极限值，这种间断点又称为可去间断点.

（2）第二类间断点. 凡不是第一类的间断点都称为第二类间断点.

在第二类间断点中，若左、右极限或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 中至少有一个为无穷大，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点；若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 振荡性的不存在，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

【例 1-45】 讨论函数 $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x=1$ 处的连续性，若 $x=1$ 为间断点，判断其

类型.

解 因为函数 $y=\frac{1}{(1-x)^2}$ 在点 $x=1$ 处无定义，故点 $x=1$ 是 $y=\frac{1}{(1-x)^2}$ 的间断点.又因 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(1-x)^2}=\infty$ ，所以点 $x=1$ 为函数 $y=\frac{1}{(1-x)^2}$ 的无穷间断点.

【例 1-46】 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+2, & x\neq1,\\2, & x=1\end{cases}$$

在点 $x=1$ 处的连续性，若 $x=1$ 为间断点，判断其类型.

解 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有定义，又因为 $\lim\limits_{x\to1}(2x+2)=4\neq f(1)$ ，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，且为第一类间断点. 由于我们可以改变函数的定义，令 $f(1)=4$，从而使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故点 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

习题 1-6

（1）设 $y=\frac{4}{x}$ ，若 $x_0=2$，$\Delta x=-0.2$，求 Δy .

（2）求下列函数的极限.

① $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos2x)$ ； ② $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}$ ；

③ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$ ； ④ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x}$.

（3）求下列函数的连续区间和间断点，并指出间断点的类型.

① $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ ； ② $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant1,\\1, & |x|>1;\end{cases}$

③ $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\2-x, & 1<x\leqslant2;\end{cases}$ ④ $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\1, & x=0,\\x, & x>0.\end{cases}$

（4）证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 与 2 之间.

（5）设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\x+a, & x\geqslant0,\end{cases}$ 常数 a 为何值时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

复习题一

一、填空题

（1）设 $f(x)=2x+1$，则 $f[f(x)-1]=$____________.

（2）由函数 $y=\lg u$ ，$u=\sin v$ ，$v=x+\frac{\pi}{3}$ 复合而成的复合函数为__________.

（3）函数 $y=\ln\sin^2x$ 的复合过程为________________.

（4）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{(x+1)(x-4)}$ 的定义域是________．

（5）设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=$________，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=$________．

（6）若 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-3x+k}{x-5}=7$，则 $k=$________．

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x=$________，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{30}}{(3x+5)^{20}(2x-1)^{10}}=$________．

二、选择题

（1）下列各对函数不相等的是（　　）

A. $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与 $y=x+2\ (x\neq2)$　　B. $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$

C. $y=|x|$ 与 $y=x$　　D. $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 与 $y=\begin{cases}1, & x>2\\ -1, & x<2\end{cases}$

（2）下列函数中为奇函数的是（　　）

A. $y=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$　　B. $y=\dfrac{\sin x}{x}$

C. $y=\cos(\ln x)$　　D. $y=x^2\arctan x$

（3）下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是（　　）

A. $\dfrac{\sin x}{x}(x\to0)$　　B. $\ln x\ (x\to0^+)$

C. $2^{-x}\ (x\to1)$　　D. $(1-x)\sin\dfrac{1}{x-1}(x\to1)$

（4）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，则下列说法中正确的是（　　）

A. $f(x_0)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

C. $f(x)$ 在 x_0 处有定义　　D. $f(x)$ 在 x_0 处连续

（5）函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的（　　）

A.必要条件　　B.充分条件　　C.充要条件　　D.无关条件

（6）当 $x\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$（　　）

A.极限为 ∞　　B.极限为 0　　C.无界变量　　D.有界变量

（7）函数 $y=\dfrac{x-2}{x^3-x^2-2x}$ 的间断点是（　　）

A. $x=0$，$x=-1$　　B. $x=0$，$x=2$

C. $x=0$，$x=-1$，$x=2$　　D. $x=2$，$x=-1$

三、计算题、解答题

（1）求下列函数的定义域.

① $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{(x+1)(x-4)}$；　　② $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$.

（2）求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$；　② $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$；　③ $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$；

④ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{-3x+2}$；　⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\tan 2x}{x}$；　⑥ $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-8}{2x^3+6x-4}$.

（3）证明方程 $x^3+3x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.

（4）某工厂生产一种配件，设生产能力为日产量 120 件，每日的固定成本为 200 元，每件的可变成本为 10 元，问：

①求该厂生产此配件的日总成本函数及平均成本函数；

②若每件售价 15 元，试写出总收入函数；

③试写出利润函数.